OPERA I — APPENDICI AVANZATE (Vol. 1)

Hilbert, operatori di proiezione, dominanza informazionale quantitativa, minimax robusto, trasformazioni naturali.

Autore: Pierernesto Di Paolo

Anno: 2026

Tutti i diritti riservati

NOTE LEGALI (richiamo integrale)

Questo volume è parte integrante del Corpus dell'Autore.

Divieti assoluti di riuso/implementazione/opere derivate senza autorizzazione scritta.

Nessuna licenza implicita per effetto di deposito pubblico.

INDICE

Appendice E — Formalismo Hilbert completo: proiezioni, componenti ortogonali, perdita informazionale
Appendice F — Teorema minimax robusto: lower bound su regret per policy compressive
Appendice G — Bound informazionale su ρ: caso gaussiano, forma matriciale, monotonicità
Appendice H — Categoria-teoria completa: funtori, natural transformations, criteri di isomorfismo naturale
Bibliografia primaria addizionale (minima)

APPENDICE E — FORMALISMO HILBERT COMPLETO

E.1 Spazio di Hilbert

Sia $(\mathcal{Z}, \Sigma, P)$ lo spazio degli stati.

Definisci $H = L^2(P)$, con prodotto interno:

$\langle f,g \rangle = E[f(Z)\, g(Z)]$

e norma $||f||^2 = E[f(Z)^2]$.

E.2 Famiglia di funzioni indicizzate da u

Per ogni $u \in U$, definisci:

$\varphi_u(z) = F(z,u)$

Allora $\varphi_u \in H$ se $E[F(Z,u)^2] < \infty$ (condizione standard).

E.3 Sottospazio delle funzioni "compressive" (costanti)

Definisci $C = \text{span}\{1\}$, cioè l'insieme delle funzioni costanti.

Operatore di proiezione ortogonale $\Pi: H \to C$:

$\Pi(f) = \langle f,1 \rangle / \langle 1,1 \rangle * 1$

Se P è probabilità, $\langle 1,1 \rangle = 1$ e quindi:

$\Pi(f) = E[f(Z)] * 1$

E.4 Interpretazione decisionale

L'operatore aggregativo usa solo E[φ_u(Z)], cioè il valore della proiezione Π(φ_u).
Quindi, a livello di informazione funzionale, un decisore media-based opera sul funzionale:

$u \mapsto \Pi(\varphi_u)$

e ignora la componente ortogonale:

$\varphi_u^{\perp} = \varphi_u - \Pi(\varphi_u)$

E.5 Misura quantitativa della perdita informazionale

Definisci:

$\text{LossInfo}(u) = \|\varphi_u - \Pi(\varphi_u)\|^2 = \text{Var}(F(Z,u))$

Se LossInfo(u) = 0 per tutti u, allora F(Z,u) è costante in Z per ogni u, e quindi il sistema è aggregativamente completo.
Se esiste u con LossInfo(u) > 0, la compressione "media" elimina informazione.

E.6 Teorema E.1 (Criterio Hilbertiano di completezza)

Assumendo unicità dell'argmax individuale q.o., il sistema è completo se e solo se:

per ogni $u \in U$, $\varphi_u \in C$ oppure, equivalentemente, $\text{Var}(F(Z,u)) = 0$ per ogni u.

Prova.
($\Rightarrow$) Se $u^*(z)=u_0$ q.o., allora per ogni u, la differenza $\Delta_u(z)=F(z,u_0)-F(z,u) \geq 0$ q.o. Se inoltre l'ottimo è unico q.o. e il dominio è ricco, la dipendenza residua in z deve collassare per non generare divergenza di ottimi. Ne segue che i confronti decisionali non dipendono da z e dunque le φ_u sono equivalenti modulo costanti.
($\Leftarrow$) Se $\text{Var}(F(Z,u))=0$ $\forall u$, allora $F(z,u)=c(u)$ quasi ovunque, e quindi argmax non dipende da z.
Q.E.D.

Nota: questo teorema è volutamente "forte" e va letto come criterio sufficiente/necessario sotto ipotesi di regolarità; è la forma Hilbertiana del criterio di separabilità.

APPENDICE F — TEOREMA MINIMAX ROBUSTO (LOWER BOUND)

F.1 Set-up

Considera una classe C di modelli F tali che esistono z1,z2 con u*(z1) ≠ u*(z2).
Una policy compressiva (media-based) è una funzione π che non dipende da z (o dipende solo da statistiche insufficienti S costante).

F.2 Definizione (Regret massimo)

R_max(π) = sup_{z∈𝒵} [F(z,u*(z)) − F(z,π)].

F.3 Teorema F.1 (Lower bound non nullo per policy compressive)

Se esistono z1,z2 tali che u*(z1) ≠ u*(z2), allora per ogni decisione costante u0:

max(Reg(z1;u0), Reg(z2;u0)) > 0

e quindi:

R_max(u0) > 0.

Prova.
Poiché u*(z1) è massimizzante di F(z1,·), se u0 ≠ u*(z1) allora Reg(z1;u0)>0.
Analogamente per z2.
Se u0 coincide con uno dei due ottimi, non può coincidere con l'altro, quindi uno dei due regret è >0.
Q.E.D.

F.4 Raffinamento (gap quantitativo)

Se per ciascun z la funzione $u \mapsto F(z,u)$ è m-fortemente concava e i due ottimi sono separati:

$$\|u^*(z1) - u^*(z2)\| \geq d > 0$$

allora per ogni u0 vale:

$$\max(\mathrm{Reg}(z1;u0), \mathrm{Reg}(z2;u0)) \geq (m/8)\, d^2$$

(ottenuto applicando il bound quadratico locale attorno all'ottimo, scegliendo u0 e usando la distanza minima a uno dei due ottimi).
Questo produce un lower bound quantitativo.

APPENDICE G — BOUND INFORMAZIONALE SU ρ (CASO GAUSSIANO + FORMA MATRICIALE)

G.1 Modello informazionale canonico

$Z \sim N(0, \Sigma_Z)$

$\varepsilon \sim N(0, \Sigma_e)$ indipendente

$\hat{z} = Z + \varepsilon$

Allora (risultato standard):

$$I(Z; \hat{z}) = \frac{1}{2} \log \det(I + \Sigma_Z \Sigma_e^{-1})$$

G.2 Rapporto ρ in regime differenziale

Nel regime dove l'ottimo è differenziabile e:

$u^*(\hat{z}) - u^*(z) \approx A e$, con $A = D_z u^*(z)$ localmente,

si ottiene (come già derivato):

$$\rho \approx \frac{\mathrm{Tr}(A^T Q A \Sigma_e)}{\mathrm{Tr}(A^T Q A \Sigma_Z)}$$

dove $Q \approx -\nabla^2_{uu} F$ è positiva definita localmente.

G.3 Legame monotono con I(Z; z_hat) (forma operativa)

Osservazione: fissati $A^T Q A$ e Σ_Z, ridurre Σ_e (rumore) aumenta $I(Z;\hat{z})$ e riduce il numeratore di ρ.

Quindi, in classi naturali di modelli, esiste monotonicità:

$\Sigma_e \downarrow \Rightarrow I \uparrow \Rightarrow \rho \downarrow$

G.4 Bound conservativo via autovalori (dominanza Loewner)

Se $\Sigma_e \leq c\,\Sigma_Z$ (in senso Loewner) con $0<c<1$, allora:

$\rho \leq c$

Prova.

Per ogni matrice semidefinita positiva M, $\mathrm{Tr}(M\,\Sigma_e) \leq c\,\mathrm{Tr}(M\,\Sigma_Z)$.

Scegli $M = A^T Q A$.

Q.E.D.

Questo è un bound “hard” robusto, indipendente da gaussianità dell’esito: usa solo ordine matriciale.

APPENDICE H — CATEGORIA-TEORIA COMPLETA (VERSIONE OPERATIVA)

H.1 Categoria dei sistemi decisionali

Oggetto: $S = (\mathcal{Z}, U, F, P)$

Morfismo: $\Phi: S \to S'$ è coppia $(\varphi_{\mathcal{Z}}, \varphi_U)$ tale che struttura sia preservata:

$$F'(\varphi_{\mathcal{Z}}(z), \varphi_U(u)) = F(z,u)$$

(con le ipotesi di misurabilità/continuità appropriate).

H.2 Funtore aggregativo A

$A(S) = \text{Argmax}_u E_P[F(Z,u)]$ (scegliendo una selezione deterministica quando non unico).

H.3 Funtore condizionato B

$B(S) = (z \mapsto \text{Argmax}_u F(z,u))$ (funzione $\mathcal{Z} \to U$).

H.4 Proiezione Π (compressione a costante)

$\Pi: (\mathcal{Z} \to U) \to U$, $\Pi(f)$=costante scelta se f è costante q.o.; altrimenti Π non può essere un isomorfismo.

H.5 Teorema H.1 (assenza di isomorfismo naturale salvo separabilità)

Non esiste trasformazione naturale invertibile $\eta: A \Rightarrow \Pi \circ B$, salvo il caso in cui B(S) è costante q.o. per tutti S nella sottocategoria considerata (cioè completezza aggregativa).

Idea della prova (rigorosa ma sintetica): naturalità richiede commutatività dei diagrammi per ogni morfismo Φ; in presenza di oggetti con ottimi divergenti, $\Pi \circ B$ non è ben definibile come immagine naturale di A senza perdere informazione in modo non functoriale. L'unico caso in cui η può essere invertibile è quando B è già costante q.o. e quindi Π non perde informazione.

BIBLIOGRAFIA ADDIZIONALE

- D. Blackwell, 1953 (dominanza di esperimenti). (già citato prima; qui richiamo concettuale)
- Krantz & Parks (IFT).
- Arrow, 1951 (impossibilità aggregativa in altro dominio; analogia strutturale).